26-03-2018

$$\left.\begin{array}{l} f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R} \\ \text{συνεχ στο } [\alpha,\beta] \\ \exists\, f' \text{ στο } [\alpha,\beta] \\ |f'(x)|\le M,\ \forall x\in(\alpha,\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \le M|x-y|$$

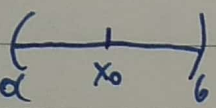
Με εφαρμογή Θ.Μ.Τ

$\Rightarrow f\in Lip(M)$

για $\xi\in(x,y)$ $\Rightarrow$ f ομοιομ. συνεχ.

$$\left.\begin{array}{l} f\in Lip(M) \\ \exists\, f' \text{ στο } (\alpha,\beta) \\ f \text{ συνεχ. στο } [\alpha,\beta] \end{array}\right\} \Rightarrow |f'(x)|\le M \quad \forall M\in(\alpha,\beta)$$

$\forall x\in(\alpha,\beta)$



$$\exists\ |f'(x_0)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| \le \lim_{h\to 0}\frac{M\cancel{|h|}}{\cancel{|h|}} = M$$

Αφού $|f(x)-f(y)| \le |M|\,|x-y|,\ \forall x,y\in(\alpha,\beta)$

$f(x)=\sqrt{x}$

$x\in[0,1)$ Είναι Lip (?)

$$\exists\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \underset{1}{\underset{\wedge}{x}}>0$$

$f'(x)$ όχι φραγμ. $\Rightarrow$ $f(x)$ όχι Lip.

Αν η $f \in Lip(M)$, για κάποιο $M>0$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

$\forall x, y \in [0,1]$

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M\,|x-y|$

$\forall x, y \in [0,1]$

$\frac{|x-y|}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \leq M\,|x-y|$

①

$\forall x \neq y$ $\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \geq \frac{1}{M}}$, $\forall x, y \in [0,1]$, $x \neq y$

$x=0$

$y_n = y = \frac{1}{n^2}$

①: $0 + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(\alpha, b) \to \mathbb{R}$

συνχ στο $(\alpha, b)$

τότε η $f$ είναι ~~ολοκλ~~ ομοιομ. συνχ.

$\exists \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$

Αρχή μεταφ. για όρια.

$f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

π.χ. $(\alpha, 6)$   $x_0 \to \alpha^+$ : $x_0 \in (\alpha, 6)$ //

$x_0$ σημείο συσσώρευσης στο A $\boxed{(x_0 - r, x_0 + r) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset}$ ①
$\forall r \in \mathbb{R}$,

ή

$\boxed{[x_0 \text{ σ.σ. στο } A \iff \exists (x_n)_n \subseteq A : x_n \neq x_0, \forall n]}$ ②

① ισοδ. με το ②

Αρχή μεταφ.

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, σ.σ. του A

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall (x_n)_n \subseteq A : x_n \to x_0, x_n \neq x_0$

Ασκ. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$
οψ. συνχ.
$\exists \lim_{n \to 0} f(1/n)$ ;

$\cancel{0 \in \mathbb{R}}$

0 σ.σ. $(0,1)$

$\frac{1}{n} \neq 0$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = l$

$\Rightarrow \lim f(1/n) = l$

Ασκ: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ ομ. συνχ $\Rightarrow f$ φραγμένη

$\Downarrow$

$\exists \lim_{x \to 0^+} f$, $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x)$

Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$g(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$g(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$g(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ $g$ συνx στο $[0,1]$

$\Downarrow$

$\exists M > 0 \quad |g(x)| \leq M, \ \forall x \in [0,1]$

$\Downarrow$

$|f(x)| \leq M, \forall x \in (0,1).$

Αφού $f(x)$ ομ. συνx $\Rightarrow$ $f$ συνx. στο $(0,1)$

Αν η $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνx και φραγμ. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f$ ομ. συνx.

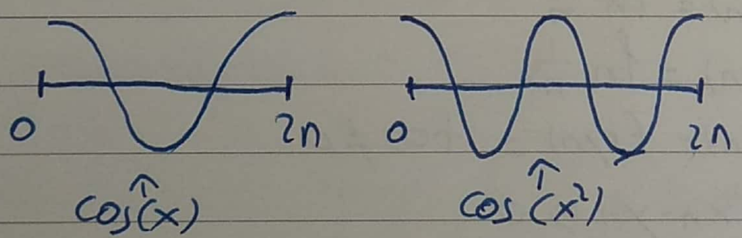
π.χ. $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in (0,1)$

Θέτουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$

$f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \to 0$ $\quad$ $f(y_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0.$

$f(x) = \cos(x^2)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




$[100\pi, (100+2)\pi]$

$f$ όχι ομ. συνx.

$x_n = \sqrt{n\pi} \to +\infty$

$y_n = \sqrt{(n+1)\pi} \to +\infty$

$x_n - y_n =$

$y_n - x_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{(n+1)\pi}} \to 0$

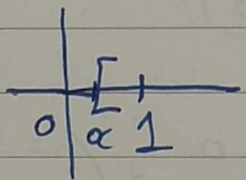
$f(x_n) = \cos(\pi x_n)$ , $n = 2k$, $f(x_{2k}) = \cos(2\pi k) = 1$
$f(y_n) = \cos(\pi n + \pi)$ , $n = 2k$, $f(y_{2k}) = \cos(2\pi k - \pi) = 1$

$y_n - x_n \to 0 \Rightarrow y_{2k} - x_{2k} \to 0$
$f(x_{2k}) - f(y_{2k}) = 1 - (-1) = 2 \not\to 0$
$\Rightarrow f$ όχι ομ. συν.

$f(x) = \ln x$
$x \geq 1$
$x \in [1, +\infty)$

$0 < f'(x) = \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow |f'(x)| \leq 1$

$\Rightarrow f \in Lip(1)$, στο $[1, +\infty)$
$\Rightarrow f$ ομ. συν.



$0 < \alpha < 1, x \geq \alpha$

$|f'(x)| = |\frac{1}{x}| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow f\ Lip(1/\alpha) \Rightarrow f$ ομ. συν.

$x_n = \frac{1}{n}$ | $f(x_n) = \ln \frac{1}{n}$
$y_n = \frac{1}{n^2}$ | $f(y_n) = \ln \frac{1}{n^2}$
| $f(x_n) - f(y_n) = +\infty \neq 0$
Αλλά $x_n - y_n \to 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , $x \in (0, 1]$

$f$ ομ. συν στο $(0, 1]$ ? $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

ορίζεται $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$g$ συνx στο $[0,1]$

$\Downarrow$

$g$ ομ. συνx

$\Downarrow$

$f$ ομ συνx $(0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$|f'_{(x)}| = 2 \to f/(0,+\infty)$ Είναι Lip(2) $\to$
$_{x>0}$

$f$ ομ. συνx.

παρόμοια στο $(-\infty, 0)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ①

$\Rightarrow f$ ομ. συνx.

① $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \quad |x| \geq M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Αρκει ν.δ.ο.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x,y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Εφόσον $f$ ομ. συνx στο $[-M, M] \to$ αν $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$:
$\forall x,y \in [-M, M]$ με $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Για $x, y \notin [-M, M]$ με $|x-y| < \delta_1$
$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Για $x \in [-M, M]$ αλλά $y \notin [-M, M]$ $\quad y > M$
$|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$|x - M| < \delta_1 \to |f(x) - f(M)| < \varepsilon$
$x, M \in [-M, M]$

$f(x) - f(y) \leq |f(\cancel{x}) - f(y)| + |f(x) - f(M)| < \varepsilon + |f(y)| + ||f(M)|| <$

$< \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2\varepsilon$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f$ ομ. συν. $[0, +\infty)$

$f$ ομ. συν. $(-\infty, 0]$

$\Rightarrow f$ ομ. συν. στο $\mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$ $\quad f$ ομ. συν. $[0, +\infty) \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \geq 0 : |x - y| < \delta_1$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (1)

$f$ ομ. συν. $(-\infty, 0]$
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x, y \leq 0 : |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2)

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$

i) $x, y \geq 0$, $|x - y| < \delta < \delta_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

ii) $x, y \leq 0$, $|x - y| < \delta < \delta_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

iii) $x > 0$, $y > 0$

$|x - 0| < \delta < \delta_1$, επίσης $|x - y| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{4}$

$|y - 0| < \delta < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{4}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

$f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

συνx $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell = +\infty$

$\Rightarrow f$ ομ. συν.

(1) $\Rightarrow$ αν $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists M > 0 : \forall x \geq M : |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Μελετάμε $f/[1,M]$ ομ. συνx. $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0, \forall x,y \in [1,M]$ με $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon < 3\varepsilon$

Έστω $x,y \in [1,+\infty)$ με $|x-y| < \delta_1$

i) $x,y \in [1,M] \Rightarrow$ ②

ii) $x,y \geq M$ $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon < 3\varepsilon$

iii) $x \in [1,M]$, $y \geq M$ $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)| + |f(M)-f(y)| < 3\varepsilon$

Ασκ. 3 β (φυλλαδίου)

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow f$ όχι ομ. συνx. στο $(0,1)$

$x \in (0,1)$

---

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνx

$(x_n)$ βασική $\Rightarrow (f(x_n))$ βασική     Σωστό ή λάθος;

①

① $\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : x_n \to \ell$
$f$ συνx στο $\ell \in \mathbb{R}$ = Π.Ο. $\Big\}$ $f(x_n) \to f(\ell)$

Αν $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ συνx $\overset{?}{\Rightarrow}$ μεταφ. βασ. σε βασ.

$f(x) = \frac{1}{x}$     $(x_n)_n$ βασική στο $(0,1)$, $x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n \in (0,1)$
$(f(x_n))_n$ όχι βασική στο $\mathbb{R}$     $\searrow$ $0$, $(x_n)$ βασική

$f(x_n) = n^2 \to +\infty$
$\Rightarrow (f(x_n))_n$ όχι βασική